# Лекция 9

**Теоремы Фредгольма для общего случая уравнения Фредгольма.**

**Симметричные интегральные уравнения.**

**Симметричные ядра.**

**Определение.** Комплексное ядро называется симметричным или эрмитовым, если

. (1)

Из формулы (1) следует, что функция вещественная.

В случае вещественного ядра . (2)

Если ядро симметрично, то все его итерированные ядра также симметричны.

Например,

и т.д.

**Пример.** Ядра , , - симметричные, ядро – несимметричное.

Рассмотрим интегральный оператор Фредгольма с симметричным ядром:

(3)

Интегральный оператор Фредгольма с симметричным ядром удовлетворяет соотношению

(4)

или

(5)

В частности, для любой функции , откуда следует, что .

**Определение.** Интегральные операторы с симметричными ядрами называют самосопряженными.

**Лемма 1.** Все характеристические значения самосопряженного интегрального оператора вещественны.

Доказательство. Пусть – характеристическое значение интегрального оператора (3), а – соответствующая собственная функция, т.е. . Отсюда , .

**Лемма 2.** Собственные функции, отвечающие различным характеристическим значениям ортогональны.

Доказательство. Пусть – характеристические значения, а и – соответствующие им собственные функции, т.е.

, .

Тогда или .

.

Характеристические значения вещественны.

Отсюда . Так как , то .

**Теорема 1.** Всякое интегральное уравнение с симметричным ядром имеет по крайней мере одно характеристическое значение.

( без доказательства)

Из теорем Фредгольма следует, что все характеристические значения имеют конечный ранг, и их число на любом ограниченном промежутке конечно.

Собственные функции, соответствующие одному и тому же характеристическому значению, можно сделать ортогональными. Так как собственные функции, соответствующие различным характеристическим значениям, между собой ортогональны, то множество всех собственных функций образует ортогональную систему.

Каждую собственную функцию можно нормировать, разделив её на её норму. Следовательно, совокупность собственных функций симметричного ядра можно считать ортонормированной.

Характеристические числа и собственные функции симметричного ядра принято выписывать в виде последовательностей

(7)

(8)

с соблюдением следующих правил:

1. числа выписывают в порядке возрастания их модулей
2. каждое характеристическое число выписывают столько раз каков его ранг, при этом каждому такому числу соответствует одна собственная функция
3. система ортонормирована.

**Определение.** Система (8) называется системой собственных функций ядра или соответствующего интегрального уравнения.

**Разложение симметричного ядра по собственным функциям.**

Пусть - конечная или бесконечная система характеристических значений, а - соответствующая ортонормированная система собственных функций симметричного ядра . Эта система может не быть замкнутой, т.е. при разложении функции в ряд Фурье по ней, нельзя утверждать, что сумма ряда равна исходной функции.

Разложим ядро в ряд Фурье по ортонормированной системе . Коэффициенты Фурье

,

. (9)

**Теорема 2.** Если ядро непрерывно в основном квадрате и ряд (9) равномерно сходится в основном квадрате, то его сумма совпадает с :

. (10)

Доказательство. Рассмотрим функцию

. (11)

- непрерывная симметричная функция. Фиксируя , рассмотрим как функцию от на отрезке . Найдем её коэффициенты Фурье относительно :

,

откуда следует, что для всех собственных функций

. (12)

Докажем, что в основном квадрате. Предположим, от противного, что не обращается в тождественный нуль в основном квадрате. Рассмотрим интегральные уравнения с ядром :

.

Так как это уравнение с симметричным ядром, то по теореме 1 оно имеет по крайней мере одно характеристическое значение , которому соответствует собственная функция

(13)

Докажем, что функция ортогональна ко всем собственным функциям ядра .

Домножая (12) на и интегрируя по , имеем

.

Учитывая (13) и симметричность функции , имеем:

, (14)

Перепишем (13) в виде

.

Принимая во внимание равномерную сходимость ряда (9) и формулу (14), имеем

.

Тогда , т.е. является собственной функцией ядра , значит является линейной комбинацией собственных функций , соответствующих собственному значению . Но это невозможно, так как доказано, что функция ортогональна ко всем функциям .

Следовательно, предположение о том, что функция отлична от тождественного нуля, неверно, и имеет место формула (10).

Можно доказать, что справедливо более сильное утверждение, чем теорема 2.

**Теорема 3.** Если или , то ряд (9) сходится в среднем в основном квадрате и его сумма равна .

Если ядро имеет конечное число характеристических значений, то ряд (9) содержит конечное число слагаемых и имеет место равенство

,

т.е. ядро – вырожденное. С другой стороны, ранее доказано, что любое вырожденное ядро имеет конечное число характеристических значений. Тем самым доказана следующая теорема.

т.е. ядро – вырожденное. С другой стороны, ранее доказано, что любое вырожденное ядро имеет конечное число характеристических значений. Тем самым доказана следующая теорема.

**Теорема 4.** Симметричное ядро имеет конечное число характеристических значений тогда и только тогда, когда оно вырожденное.

**Теорема Гильберта-Шмидта.** Пусть - характеристические числа симметричного ядра и - соответствующие собственные функции. Пусть – функция, квадрат которой абсолютно интегрируем в промежутке . Если интеграл ограничен, то функция разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье по ортонормированной системе функций : , . Коэффициенты Фурье функции связаны с коэффициентами Фурье функции соотношением , так что .

Можно дать более краткую формулировку теоремы Гильберта-Шмидта:

**Теорема.** Если истокообразно представима через ядро , то ряд сходится абсолютно и равномерно и .

Функция называется истокообразно представимой, если существует такая функция , квадрат которой абсолютно интегрируем в промежутке , что .

Ряд называется билинейным.

**Решение интегральных уравнений с симметричными ядрами.**

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода с симметричным ядром:

.

Пусть значение – регулярное, т.е. уравнение имеет единственное решение при любом свободном члене. Обозначим - коэффициенты Фурье функции и - коэффициенты Фурье функции относительно ортонормированной системы собственных функций ядра :

, , (16)

, , (17)

Пусть – коэффициенты Фурье функции относительно этой же системы:

, т.к.

, тогда

.

Таким образом

и уравнение (1) принимает вид:

. (18)

Подставляя функции и их рядами Фурье, получим

.

Сравнивая коэффициенты Фурье левой и правой части, получаем

или

. (19)

Если – регулярное, т.е. не совпадает ни с одним из , то

(20)

и формула (18) дает

. (21)

Ряд (21) сходится абсолютно и равномерно для непрерывных ядер и сходится в среднем для ядер из .

Подставим выражение для из формулы (16) в (21) получим

,

где - резольвента интегрального уравнения с симметричным ядром.

Пусть теперь, например, . Тогда формула (19) приводит к необходимым условиям разрешимости

, . (22)

Таким образом, свободный член должен быть ортогонален к собственным функциям, соответствующим характеристическим значениям . Формула (20) определяет коэффициенты при .

Если условия (22) выполнены, то общее решение уравнения (1) является суммой какого-либо решения уравнения (1) и общего решения соответствующего однородного уравнения:

. (23)

Кратко говоря, если значение – регулярное, то решение уравнения (1) даётся формулой (21)

.

Если значение – характеристическое, то один или несколько знаменателей обращается в 0. Тогда для разрешимости уравнения необходимо, чтобы соответствующие числители также обращались в 0. При этом в формуле решения все дроби вида нужно заменить произвольными постоянными.

**Пример 1.** Решить уравнение

, (24)

где

Решение. Ядро симметричное. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение и запишем его в виде

(25)

Дважды продифференцируем это уравнение:

(26)

или

. (27)

Подставляя в (25) и (26) значения и , получим краевые условия

, ,

, , т.е.

, . (28)

Соотношения (27) и (28) образуют однородную краевую задачу, решая которую, найдем характеристические числа и собственные функции исходного интегрального уравнения.

Рассмотрим два случая.

1. , тогда

,

.

Краевые условия приводят к системе

Определитель системы имеет вид

, следовательно , и .

не подходит по условию, так как . При , , , , при , , , ,

– произвольная постоянная. Тогда имеем характеристическое значение и собственную функцию .

1. , тогда

,

.

Краевые условия приводят к системе

Определитель системы имеет вид

Откуда получаем , , или , .

При получаем , , – произвольная постоянная, .

Переход от к приводит только к смене знака. Откуда получаем, что каждому характеристическому значению , соответствует собственная функция .

В результате получаем, что для заданного ядра характеристические числа , , , а соответствующие им собственные функции

, ,

В данном, случае, каждое характеристическое число имеет ранг

, а последовательность собственных функций ортогональна на отрезке .

Найдем нормы данных функций

.

.

Нормированные собственные функции имеют вид

, .

Если и , , то уравнение имеет единственное решение.

,

,

Таким образом, при и , решение уравнения

.

При , и , уравнение решений не имеет, так как его правая часть не ортогональна к соответствующим собственным функциям , , , .

Если , , то интегральное уравнение имеет бесконечное множество решений

.